MATIÈRES À OPTION Mathématiques, Sciences physiques, Biologie

(Option générale) DURÉE : 3 heures MATHÉMATIQUES

PRÉLIMINAIRES

A

Soit X une variable aléatoire réelle ayant une espérance.

Démontrer que :

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad \left(P(|X| > \varepsilon) \leqslant \frac{E(|X|)}{\varepsilon}\right)$$

dans le cas

a. X est une variable aléatoire discrète,

b. X est une variable aléatoire continue.

B

En déduire que si X a une variance $\quad (\forall \varepsilon > 0) \quad \left(P(|X - E(X)| > \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2}\right)$.

On rappelle qu'une suite de variables aléatoires (Z_n) converge en probabilité vers une variable aléatoire Z si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|Z_n - Z| > \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

On notera

$$\lim_{n \to +\infty} \text{st}(Z_n) = Z.$$

Pour $a \in \mathbb{R}$, on notera de même $\lim_{n \to +\infty} \text{st}(Z_n) = a$ si $\forall \varepsilon > 0 \quad P(|Z_n - a| > \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$

PREMIÈRE PARTIE

On suppose que les variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont toutes même loi.

On suppose que X_n a une variance et que :

(1) $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \text{cov}(X_i, X_{i+k}) = \text{cov}(X_0, X_k).$$

On posera :

α. $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \rho_k = \text{cov}(X_0, X_k)$; $\rho_0 = \sigma^2(X_0)$.

β. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

γ. $m = E(X_n)$.

1.1. Démontrer que $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \quad \sigma^2(S_n) = n\rho_0 + 2\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\rho_k$.

1.2. On supposera que : $\quad (\exists r \in]0; 1[) \ (\forall k \in \mathbb{N}^*) \quad (|\rho_k| \leqslant r^k)$.

On pose $\quad \rho = \rho_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \rho_k$.

a. Justifier l'existence de ρ.

b. Montrer que $\quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sigma^2(S_n) = \rho$.

Tournez la page S. V. P.

1.3. On remplace l'hypothèse du (1.2) par : « la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \rho_k$ est absolument convergente ».

a. Démontrer que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k\rho_k$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

b. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sigma^2(S_n) = \rho$.

c. Que peut-on en déduire de la suite $\sigma^2\left(\frac{S_n}{n}\right)$?

La suite $\frac{S_n}{n}$ converge-t-elle en probabilité ? Si oui, vers quelle variable aléatoire ?

1.4. Soit Y_n une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0;1]$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = Y_{n+1} - Y_n$.

a. Quelle est la loi de X_n ?

b. Calculer ρ_0 ; $\rho_k (k \in \mathbb{N}^*)$; ρ.

Que peut-on en conclure pour la suite de variables aléatoires $\frac{Y_n}{n}$?

Deuxième partie

Soit $(X_n)\ n \in \mathbb{N}$ une suite de variables aléatoires. Elle sera dite bornée si et seulement si $(\exists\, c \in \mathbb{R}^{+*})\ (\forall\, n \in \mathbb{N})\ (P(|X_n| \leqslant c) = 1)$.

2.1. Démontrer que si $E(|X_n|) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} \text{st}\, X_n = 0$.

2.2. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \text{st}\, X_n = 0$ et que X_n est une suite de variables aléatoires bornée par c.

On pose $\forall \varepsilon > 0 \quad A_n(\varepsilon) = (|X_n| \geqslant \varepsilon)$.

a. Démontrer que $E(|X_n|) \leqslant c\, P(A_n(\varepsilon)) + \varepsilon$.

b. En déduire que $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n \geqslant n_0 \Rightarrow E(|X_n|) \leqslant 2\varepsilon)$.

En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite bornée de variables aléatoires converge en probabilité vers 0.

2.3. Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, bornée.

On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \text{st}\, X_n = a \quad (a \in \mathbb{R})$.

a. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \text{st}\, f(X_n) = f(a)$.

b. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} E(f(X_n)) = f(a)$.

c. Supposons que $(Y_n)\ n \in \mathbb{N}$ est une suite de variables aléatoires de Poisson de paramètre h $(h > 0)$, indépendantes.

On pose $U_n = \frac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \text{st}\, U_n = h$.

En déduire que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(x + \frac{k}{n}\right) e^{-nh} \frac{(nh)^k}{k!} = f(x + h)$.

• • •